

## EXERCISE ONE

作业4/16课堂交。上机作业交电子版4/21前到邮箱。带\*\*\*部分题本科生选做，研究生必做。

1. (内积) 记 $L^2([0, 2\pi])$ 为实的平方可积函数, 给出其内积的定义,
  - a: 说明其是一个Hilbert空间(给出其正交基和\*\*\*说明完备性);
  - b: 如果记 $\hat{L}^2([0, 2\pi])$ 为复值的平方可积函数, 定义复积并说明其是一个Hilbert空间。
  - c: 特别以上两个空间有什么关系? (提示: 正交基存在对应关系)
2. (傅立叶级数) 设 $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1, f(x) = -1, -1 \leq x < 0$ .其他为零。
  - a: 计算 $f(x)$ 的傅立叶变换。
  - b: 计算其生成的周期为2的奇方波 $f_0$ 的傅立叶级数;
  - c: 计算 $f(x)$ 的能量 ( $L_2$ 范数)和  $f_0$ 的傅立叶系数的能量 ( $l_2$ 范数).
3. (傅立叶变换)
  - a: 写出高斯函数表达式, 说明属于Schwartz空间, 计算其傅立叶变换。
  - b: 计算 $\frac{\sin x}{x}$ 的傅立叶变换。(可以利用c)
  - c: \*\*\* 证明: 傅立叶变换的对偶性: 记 $f$ 的傅立叶变换为 $F = \hat{f}$ ,则 $F$ 的傅立叶变换 $\hat{F} = 2\pi f(-t)$ 。
4. 设随机信号序列 $x(n) = A \cos(\omega n)$ ,其中 $A, \omega$ 是正常数.
  - (a) 计算 $x(n)$ 的相关系数和自相关函数 $r_x(k)$ 。
  - (b) 验证:  $r_x = x(-m) * x(m), r_x(0) \geq r_x(k)$
  - (c) \*\*\*计算其功率谱密度;即 $r(k)$ 的傅立叶变换;
  - (d) \*\*\*验证: 功率谱密度是周期为 $2\pi$ 的实函数; 且是非负定  $S(e^{i\omega}) \geq 0$
5. 利用任意LTI系统是卷积系统, 即 $H(x(t)) = h(t) * x(t)$ . 证明:
  - a: 如果单位响应信号满足 $h(t) = 0, t \leq 0$ (称为因果信号),则系统是因果系统。
  - b: 如果单位响应信号满足 $\int |h(t)| < \infty$ , 则系统是BIBO稳定系统。(输入有界, 输出有界).
  - c: \*\*\* 验证: 指数函数 $e^{ist}$ 是任一卷积算子和平移算子( $T_a(x(t)) = x(t - a)$ )的特征向量。即任意 $h(t) * e^{ist} = \lambda_1(s)e^{ist}, T_a(e^{ist}) = \lambda_2(s)e^{ist}$ ,其中 $s$ 为固定参数,  $t$ 为变量。
6. \*\*\*给定微分方程 $u'' + a^2u = f(t)$ ,已知当 $f(t) = \delta(t)$ 时, 得到基本解 $G(t) = e^{-a|t|}/(2a)$ .证明: 给定任意函数 $f(t)$ 的解为  $G(t) * f(t)$ .注: 利用傅立叶变换。

## 上机作业MATLAB

每次作业要求上交一个README文件说明和若干M文件.

可以互相讨论但要求独立完成。

## 1. (信号的生成与运算)

A: 试生成以下信号位于时间 $[-10, 10]$ 秒上的一个抽样频率为 $8k$ 的信号序列  
(1)周期为4秒的偶方波 $G2$  (2)Matlab的Sinc波  $Sinc$  (3)\*\*\*钢琴中央C键的正弦信号;

B: 给出以上序列的时间延迟为1秒的对应序列。注意: 不是 $y(n) = x(n - 1)$ ).

C: 计算(1)和(2)的卷积和乘积序列。

D: 画图表示以上信号; (A,B可以画在一个图中。)

## 2. (信号的频率表示)

A: 利用fft和fftshift得到上题中信号的傅立叶变换;

B: 画图表示以上信号的变换; 注意: 变换的谱是复数。

C: 画图验证延迟信号和原信号的频率关系;

D: \*\*\*画图验证: 傅立叶变换的卷积公式(时域): 注意序列长度不同(应该用循环卷积)

\*\*\*画图验证: 傅立叶逆变换的卷积公式(频域)

## 3. (真实信号的频谱分析)

学习MATLAB demo: xpsound.m, 学习信号的功率谱密度(PSD)和光谱图(Spectrogram)的定义, 观察其峰值或亮区域与信号的关系。

A: 利用randn()生成大小0.1的噪音加入第一题生成的方波和sinc波, 给出FFT, 周期谱图(PSD)和光谱图,

比较原始信号的图, 说明噪音的影响。

B: 自己录入声音生成WAV文件或利用MATLAB钢琴程序.m 编出一首歌, 读入信号 $x(n)$ ;

C: 给出wav信号的频率谱FFT, (功率谱密度)周期谱图(PSD)和光谱图(利用函数 periodogram(x), spectrogram(x)).

D: 上交wav文件及说明信号与图的关系;