第七次作业参考答案

2.**解**：(1)利用分布函数的性质

$1=F(+\infty,+\infty)=a\cdot b,$

$0=F(0,y)=\lim_{x\to 0^+}F(x,y)=(a-1)(b-e^{-y}),$

由$y>0$的任意性，得$a-1=0,a=1$，所以$a=1,b=1$。

(2)$P\{X>0,Y\leqslant 2\}=P\{0<X<+\infty,-\infty<Y\leq 2\}$

$=F(+\infty,2)+F(0,-\infty)-F(0,2)-F(+\infty,-\infty)=1\times(1-e^{-2})-0-0-0=1-e^{-2}$

4.**解**：根据题意，知

$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}\cdot P\{Y=j\mid X=i\}$

$=\{^{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{i}\quad j\leq i}_{0,\quad j>i}\quad (i,j=1,2,\cdots,5)$

6.**解**：依题意知，X的可能取值为$1,2,3,\cdots$；Y的可能取值为3,4,5,6.设$B_k=$第k次时掷出1点或2点，$A_{kj}=$第k次时掷出j点，则$P(B_k)=\frac{2}{6},P(A_{kj})=\frac{1}{6},B_k+A_{k3}+A_{k4}+A_{k5}+A_{k6}=S,\{X=i,Y=j\}=$掷骰子i次，

最后一次掷出j点，前i-1此掷出1点或2点$=B_1\cdots B_{i-1}A_{ij}$，各次掷骰子出现的点数相互独立。

于是X,Y分布律为

$P\{X=i,Y=j\}=(\frac{2}{6})^{i-1}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\times(\frac{1}{3})^{i-1}\quad (i=1,2,\cdots,\quad j=3,4,5,6)$

12.**解**：(1)$P_{1\cdot}=P\{X=1\}=\frac{1}{20}+\frac{2}{20}+\frac{2}{20}+\frac{3}{20}=\frac{2}{5}$

所以在$X=1$的条件下，Y的条件分布律为：

$P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{1/20}{2/5}=\frac{1}{8}$，$P\{Y=2\mid X=1\}=\frac{2/20}{2/5}=\frac{1}{4}$

$P\{Y=3\mid X=1\}=\frac{2/20}{2/5}=\frac{1}{4}$，$P\{Y=4\mid X=1\}=\frac{3/20}{2/5}=\frac{3}{8}$

(2)$P_{\cdot 4}=P\{Y=4\}=\frac{3}{20}+\frac{1}{20}+\frac{2}{20}=\frac{3}{10}$

所以在$Y=4$的条件下，X的条件分布律为：

$P\{X=1\mid Y=4\}=\frac{3/20}{3/10}=\frac{1}{2}$，$P\{X=2\mid Y=4\}=\frac{1/20}{3/10}=\frac{1}{6}$

$P\{X=3\mid Y=4\}=\frac{2/20}{3/10}=\frac{1}{3}$

13.**解**：区域D的面积为

$S=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}dy=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3)|_0^1=\frac{1}{3}$

(X,Y)的概率密度为

$f(x,y)=\{^{3,\quad 0\leq x\leq 1,x^2\leq y\leq\sqrt{x}}_{0,\quad else}$

(X,Y)关于X的边沿概率密度为

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\{^{\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=3(\sqrt{x}-x^2),\quad 0\leq x\leq 1}_{0,\quad else}$

(X,Y)关于Y的边沿概率密度为

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\{^{\int_{y^2}^{\sqrt{y}}3dx=3(\sqrt{y}-y^2),\quad 0\le y\le 1}_{0,\quad else}$

15.: **解：**(1)由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_{2x}^{+\infty}ae^{-(x+y)}dy$
$=a\int_0^{+\infty}e^{-3}dx=a(-\frac{1}{3}e^{-3x})|_0^{+\infty}=\frac{1}{3}a,$
得$a=3$。
(2)(X,Y)关于X的边沿概率密度为
$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\{^{\int_{2x}^{+\infty}3e^{-(x+y)}dy=3e^{-3x},\quad x>0}_{0,\quad x\le 0}.$
(X,Y)关于Y的边沿概率密度为
$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\{^{\int_0^{\frac{y}{2}}3e^{-(x+y)}dx=3e^{-y}(1-e^{-\frac{y}{2}}),\quad y>0}_{0,\quad y\le 0}.$
(3)$P\{X\ge 1,Y\ge 2\}=\int\int_{x\ge 1,y\ge 2}f(x,y)dxdy=\int_2^{+\infty}dy\int_1^{\frac{y}{2}}3e^{-(x+y)}dx$
$=\int_2^{+\infty}3e^{-y}(e^{-1}-e^{-\frac{y}{2}})dy$
$=3(-e^{-1}e^{-y}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}y})|_2^{+\infty}=e^{-3}$