$\mathbb{EXERCISE}$ ONE

*3/21*课堂交。	注(***)部分是选做.

1. 证明：n维线性空间的对偶空间的对偶空间同构与它自身。$((\mathbb{E}^n)^*)^* \cong \mathbb{E}^n$
2. (具有紧支集的无穷可微函数)设 $f : R \to R$ 满足

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^{-2}} e^{-(x+1)^{-2}} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{others} \end{cases} \tag{1}$$

   (a) 设

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{2}$$

   证明$g(x)$是一个c^∞函数。进而
   $f(x)$ 是一个c^∞函数。

   (b) *** 证明任一$\epsilon > 0$存在一个光滑函数

$$h_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & x \geq \epsilon \\ \geq 0, \leq 1 & 0 < x < \epsilon \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \tag{3}$$

3. 构造正方形的边到单位圆的同胚映射。说明它是否是微分同胚。
4. 给定$\mathbb{S}^n$是单位n维球,$N = (0, 0, \ldots, 1)$是北极.定义球极投影$\sigma : \mathbb{S}^n - N \to \mathbb{R}^n$, 其中 $\sigma(x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}) = \frac{(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{1 - x^{n+1}}$
   记$S = -N$为南极，定义$\sigma_t = -\sigma(-x), x \in \mathbb{S}^n - S$.
   以下证明可以仅仅考虑$n = 2$情形。

   (a) 证明: σ 是双射。
   (b) 证明: σ, σ_t 给出了一个微分结构。并且它与投射到平面(图坐标卡)得到的微分结构是相容的。
   (c) 定义对径映射$\alpha(x) = -x$,写出α在球极投影坐标卡下表示，证明α是一个光滑同胚。

5. 证明n维光滑流形的开子集是光滑流形。
   ***说明$M \times N$矩阵中$rank = \min(m, n)$的矩阵是一个光滑流形。

6. 证明光滑映射的复合还是光滑映射。并证明对应的切映射和余切映射的公式。

7. 证明:

    (a) 若M和N微分同胚，证明它们的维数相同。

    (b) ***设M, N是光滑流形,M连通,证明$F : M \to N$是常值映射当且仅当DF在每一点是零映射。

    (c) ***设M是紧致光滑流形,证明不存在$f : M \to R^k$的淹没映射.

8. 证明以下流形是单一浸入子流形(并说明其不是嵌入子流形)。

    (a) $\gamma : (-\pi/2, 3\pi/2) \to R^2, r(t) = (\sin 2t, \cos t)$

    (b) $\gamma : \mathbb{R} \to T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2, r(t) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi ict})$,其中$c$为无理数。

9. 定义函数$f : R^2 \to R$,水平集是$f(x, y) = c$的原像。

    (a) $f(x, y) = x^3 + xy + y^3$, 说明那些水平集是嵌入子流形。

    (b) $f(x, y) = x^3 - y^2$,说明$f(x, y) = 0$不是嵌入子流形。可否是浸入子流形呢?

10. ***说明单位开圆盘上有无穷多个微分结构。